

Expresiones analíticas de la erosión de suelo e impacto en su productividad

Ignacio Sánchez Cohen¹
Aurelio Pedroza Sandoval^{2§}
Miguel A. Velásquez Valle³
Palmira Bueno Hurtado¹
Gerardo Esquivel Arriaga¹

¹INIFAP-Centro Nacional de Investigación Disciplinaria en Relación Agua-Suelo-Planta-Atmósfera. Margen derecha canal Sacramento km 6.5, Zona industrial Gómez Palacio, Durango. CP. 35140. Tel. 01(871) 1590105. ²Universidad Autónoma Chapingo-Unidad Regional Universitaria de Zonas Áridas. Dom. Conocido, Bermejillo, Durango. Tel. 01(872) 7760160. ³INIFAP-Centro de Investigación Regional Noreste. Campo Experimental Saltillo. Carretera Saltillo-Zacatecas km 342+119, núm. 9515, Hacienda de Buena Vista, Saltillo, Coahuila. CP. 25315. Tel. 01(55) 38718700.

§Autor para correspondencia: apedroza@chapingo.urruza.edu.mx.

Resumen

Las aproximaciones para la estimación y proyección de pérdida de suelo en cuencas hidrológicas, varían desde las ecuaciones empíricas, hasta el uso de modelos basados en la física ambiental. El presente estudio tuvo como objetivo generar y proponer el uso de una ecuación diferencial logística para la estimación de pérdida de suelo. Mediante el uso de un modelo exponencial bajo condiciones de deterioro del suelo, se estimó la pérdida de rendimiento del cultivo maíz en 3.5 t ha⁻¹ al pasar de 4.5 a 1 t ha⁻¹. El modelo de erosión se parametrizó con información de una cuenca experimental del INIFAP situada en el municipio de San Luis del Cordero, Durango. Los resultados indican que la tasa promedio anual de pérdida de suelo es de 0.44 mm año⁻¹, para lo cual se consideró como tasa crítica de pérdida de suelo 10 mm año⁻¹. Con esa tasa inicial, el agostadero alcanzaría su tasa máxima permisible en 19 años. Este estudio analiza el comportamiento de los parámetros del modelo de donde se ensayaron otros escenarios de pérdida de suelo donde la tasa máxima permisible se alcanza en diferentes tiempos.

Palabras clave: impacto ambiental, modelación de procesos, pérdida de suelo, rendimiento.

Recibido: mayo de 2018

Aceptado: junio de 2018

Introducción

Las pérdidas de suelo en cuencas hidrológicas es un problema recurrente en estudios hidrológicos que enfrentan los usuarios de los recursos naturales y los propios investigadores. Estas pérdidas tienen efectos in situ y ex situ de las cuencas impactadas. Los problemas in situ incluyen la pérdida de estructura del suelo, el decremento de la materia orgánica y de nutrientes del suelo y la reducción de la disponibilidad de agua en el suelo (Brooks *et al.*, 2012). Los efectos ex situ incrementan el transporte de sedimentos y la pérdida de nutrientes como el nitrógeno y fósforo que se encuentran adheridas a las partículas de suelo erodadas y depositadas en la red de drenaje de las cuencas, aguas debajo de donde se suscita el problema.

El incremento de sedimento en la red de drenaje de las cuencas reduce la capacidad de transporte y merma la calidad del agua que drena aguas abajo donde es utilizada para diferentes usos (Ffolliot *et al.*, 2013). También, la pérdida de suelo por concepto de erosión hídrica es el principal factor que limita la productividad de los suelos que obstruye la plena producción en la agricultura (Obalum *et al.*, 2012). El crecimiento poblacional y el cambio en el uso del suelo exacerbaban el proceso junto con las altas intensidades de precipitación principalmente en zonas áridas (FAO, 1995).

Resulta entonces de crucial importancia la selección del método para dimensionar o cuantificar las pérdidas de suelo en cuencas hidrológicas (Wainwright y Mulligan, 2004). Para la estimación del proceso de erosión de suelos, han sido propuestas varias aproximaciones y actualmente existen diversos modelos para este propósito, los cuales pueden ser clasificados de diferentes maneras. Acorde a Van der Knijff (2000), se puede hacer una subdivisión basado en la escala de tiempo en la que el modelo opera, así algunos modelos están diseñados para estimar pérdidas de suelo en el largo plazo y otros para estimar la erosión por evento de lluvia. En esta última categoría se puede encontrar el modelo Kineros2 (Goodrich *et al.*, 2012) y el SWAT (Arnold *et al.*, 2012). Otro enfoque útil en el proceso de selección del método para cuantificar erosión es entre modelos empíricos y modelos físicamente basados (Sánchez, 2005). La óptima selección de un modelo se debe fundamentar en la respuesta a las preguntas: ¿Qué se desea hacer?, ¿Con qué nivel de precisión y escala? y ¿Cuál es la información disponible? De omitir esto, se corre el riesgo de sobre o sub utilizar las capacidades de los distintos modelos de simulación.

Materiales y métodos

El análisis del presente trabajo se fundamenta en la ecuación de crecimiento propuesta por Malthus y descrita por Pearl y Reed (1920). La ecuación diferencial descrita es:

$$\frac{dN}{dt} = rN \quad 1)$$

Donde: N es la población y 't' es el tiempo. La ecuación diferencial establece que la variación de la población a través del tiempo es proporcional a la misma población; es decir, si la población es numerosa entonces su variación en el tiempo también lo será. La ecuación 1 es separable en términos matemáticos y su solución consiste en agrupar los términos semejantes en un lado de la

igualdad y los restantes en el otro; así la ecuación 1 se traduce en la ecuación 2 al dividir todo entre 'N' (lo que desaparece el término 'N' del lado derecho de la igualdad) y multiplicar por 'dt' (lo que desaparece la 'dt' del lado izquierdo de la igualdad):

$$\frac{1}{N} dN = r dt \tag{2}$$

Obteniendo la anti derivada (integrando) de la ecuación 2 se obtiene:

$$\int \frac{1}{N} dN = \int r dt = \ln|N| = rt + c \tag{3}$$

Donde:

$$N = e^{rt+c} = e^{rt} e^c = e^{rt} C \tag{4}$$

Si se asume que la población nunca será negativa, entonces el valor absoluto de N desaparece; así también e^C es una constante arbitraria 'C'. De esta manera, la ecuación 4 es la solución a la ecuación diferencial 1. En esta ecuación 'r' es la tasa de crecimiento poblacional.

En términos de erosión de suelos la ecuación 4 puede ser válida siempre y cuando la pérdida de suelo esté por debajo de un valor máximo (K) dictado por la profundidad del suelo; es decir, en este punto, ya no habría pérdida de suelo ya que este se habría agotado por completo. La constante 'C' de la ecuación 4 puede ser vista como la pérdida inicial del suelo al tiempo '0' [N(0)]; así si $t = 0$ al substituir este valor en esa ecuación resulta que $N(0) = 0 = C$ dado que $e^0 = 1$.

Posterior al trabajo de Malthus, Verhulst (1845); Baciaer (2011), propuso una ecuación de crecimiento aludiendo que el crecimiento poblacional no podría ser exponencial, puesto que alcanzaría un límite en donde el ecosistema ya no podría mantenerla y en ese punto se haría asintótica al tiempo. La ecuación diferencial propuesta por Verhulst es: (Wlofram, 2002; Skoldberg, 2012).

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) \tag{5}$$

Acorde a Thornes (2004), esta ecuación diferencial puede ser utilizada para la modelación del proceso de erosión cuando se conoce una tasa o pérdida de suelo inicial y el límite superior de la erosión máxima, después de la cual la productividad de los cultivos decrece. El racional del uso de la función logística se puede resumir en que mientras más erosión exista habrá más erosión. Este proceso comienza de manera lenta, posteriormente adquiere un comportamiento exponencial, para luego decrecer hasta alcanzar un equilibrio. La ciclicidad de este proceso (retroalimentación positiva) ocurre porque suelos delgados producen más escurrimiento; por lo tanto, más erosión y en consecuencia suelos más delgados. La tasa de erosión se reduce eventualmente mientras más suelo ha sido removido. Esta reducción ocurre principalmente porque los horizontes de suelo más

profundos son más densos y poseen un contenido mayor de pedregosidad. Finalmente, cuando no existe ya suelo no puede ocurrir más erosión por lo que la máxima pérdida de suelo a la que se puede llegar está dada por su profundidad.

El término $\left(1 - \frac{N}{K}\right)$ de la ecuación 5 se puede razonar como sigue: Sea 'N' el valor inicial de la erosión (puede ser tasa o puede ser volumen) y 'K' el valor máximo de pérdida de suelo; entonces cuando la erosión inicial (N) es cercana a 0, la erosión del suelo puede ser descrita por la ecuación 4; por otro lado, si la erosión se aproxima al valor máximo 'K', entonces la erosión es 0 dado que no habría más suelo que erodar y constituye la parte asintótica de la línea discontinua superior de la Figura 1.

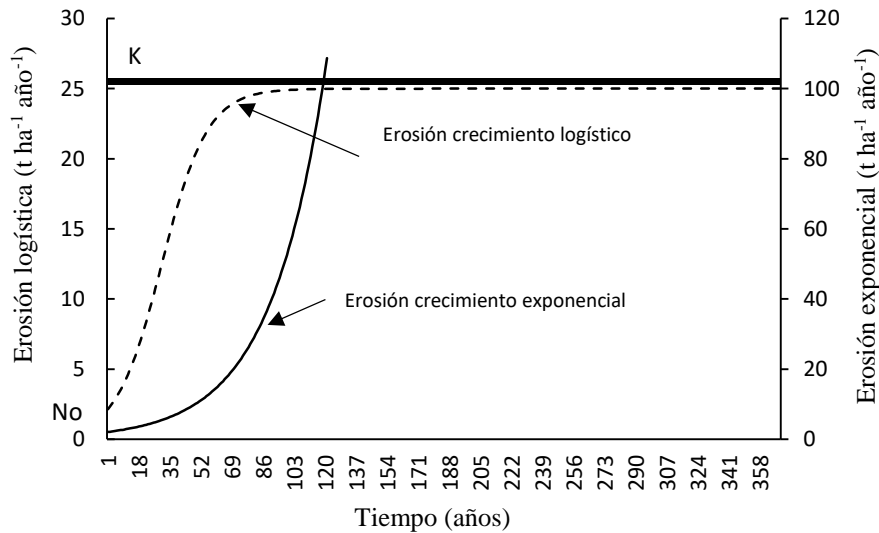


Figura 1. Solución gráfica a las ecuaciones diferenciales 4 (Línea continua) y 5 (línea discontinua) para el proceso de erosión.

La ecuación 5 es una ecuación diferencial separable, por lo que (Gershenfeld, 1999; Stewart, 1996):

$$\frac{\frac{dN}{dt}}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r = \frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} \frac{dN}{dt} \tag{6}$$

La ecuación 6 puede integrarse utilizando el esquema de solución de expansión de fracciones parciales:

$$\frac{A}{N} + \frac{B}{1 - \frac{N}{K}} = \frac{1}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} \tag{7}$$

Donde:

$$A - A \frac{N}{K} + NB = \frac{1}{N(1 - \frac{N}{K})} \quad 8)$$

Por el método de igualación de coeficientes, se tiene que $A = 1$ y $B = \frac{1}{K}$; así sustituyen estos valores en la ecuación 6 quedando:

$$\left(\frac{1}{N} + \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{N}{K}} \right) \frac{dN}{dt} = r \quad 9)$$

Expandiendo la ecuación 9 e integrando, resulta:

$$\int \frac{1}{N} \frac{dN}{dt} + \int \frac{\frac{1}{K}}{1 - \frac{N}{K}} \frac{dN}{dt} = \int r \quad 10)$$

$$\ln|N| - \ln \left| 1 - \frac{N}{K} \right| + C = rt + C \quad 11)$$

En el numerador del lado derecho de la igualdad se añade $+0N$ por lo que los coeficientes de N en el lado izquierdo se igualan a aquel del lado derecho; así entonces $\frac{A}{K}$ y $B = 0$ y $A = 1$; se sustituye el valor de A quedando $\frac{-1}{K} + B = 0$ por lo que $B = \frac{1}{K}$

Si se asume que la erosión del suelo no es negativa y se mueve en el rango $0 < N(t) < K$, entonces el operando del valor absoluto desaparece quedando:

$$\ln(N) - \ln \left(1 - \frac{N}{K} \right) = rt + c \quad 12)$$

De acuerdo a las propiedades de los logaritmos se obtiene:

$$\ln \left(\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} \right) = rt + C \quad 13)$$

Obteniendo el logaritmo natural en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{N}{1 - \frac{N}{K}} = e^{rt+c} = e^{rt} e^c = e^{rt} C \quad (14)$$

Resolviendo para N tomando el recíproco de la ecuación 14:

$$\frac{1 - \frac{N}{K}}{N} = C e^{-rt} = \frac{1}{N} - \frac{1}{K} \quad (15)$$

Añadiendo $\frac{1}{K}$ en ambos lados de la igualdad queda:

$$\frac{1}{N} = C e^{-rt} + \frac{1}{K} \quad (16)$$

Tomando el recíproco de ambos lados se tiene que:

$$N(t) = \frac{1}{C e^{-rt} + \frac{1}{K}} \quad (18)$$

Si se asume que la erosión al tiempo 0 es N_0 , entonces al tiempo 0:

$$N(0) = \frac{1}{C + \frac{1}{K}} \quad (19)$$

Tomando el recíproco de la ecuación 19 se tiene:

$$C + \frac{1}{K} = \frac{1}{N_0} \quad (20)$$

Donde:

$$C = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{K} \quad (21)$$

Sustituyendo el valor de la constante 'C' en la ecuación 18:

$$N(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{N_0} - \frac{1}{K}\right) e^{-rt} + \frac{1}{K}} \quad (22)$$

Reduciendo términos se tiene que al multiplicar numerador y denominador por $N_0 K$.

$$N(t) = \frac{N_0 K}{(K - N_0)e^{-rt} + N_0} \tag{23}$$

La ecuación 23 es la solución a la ecuación diferencial 5. $e^{r(0)} = 1$.

Parametrización del modelo logístico

El modelo logístico de erosión (ecuación 23) considera tres parámetros en su estructura: la tasa de erosión ‘r’, el estado inicial de erosión (No) y la erosión máxima o límite máximo de erosión (K) (Figura 1).

El modelo opera en cualquier escala de tiempo ‘t’, para el caso de erosión y en función de obtener una apreciación objetiva de cual pudiera ser la pérdida de suelo en alguna localidad, se recomienda la escala anual. Así, para obtener el parámetro ‘r’; es necesario, contar con datos de campo de erosión observada en el tiempo. Para la cuenca experimental del INIFAP en el municipio de San Luis del Cordero, se ha estimado una pérdida de suelo anual de 0.33 mm (r). Las características de la cuenca se muestran en la Figura 2 y Cuadro 1.

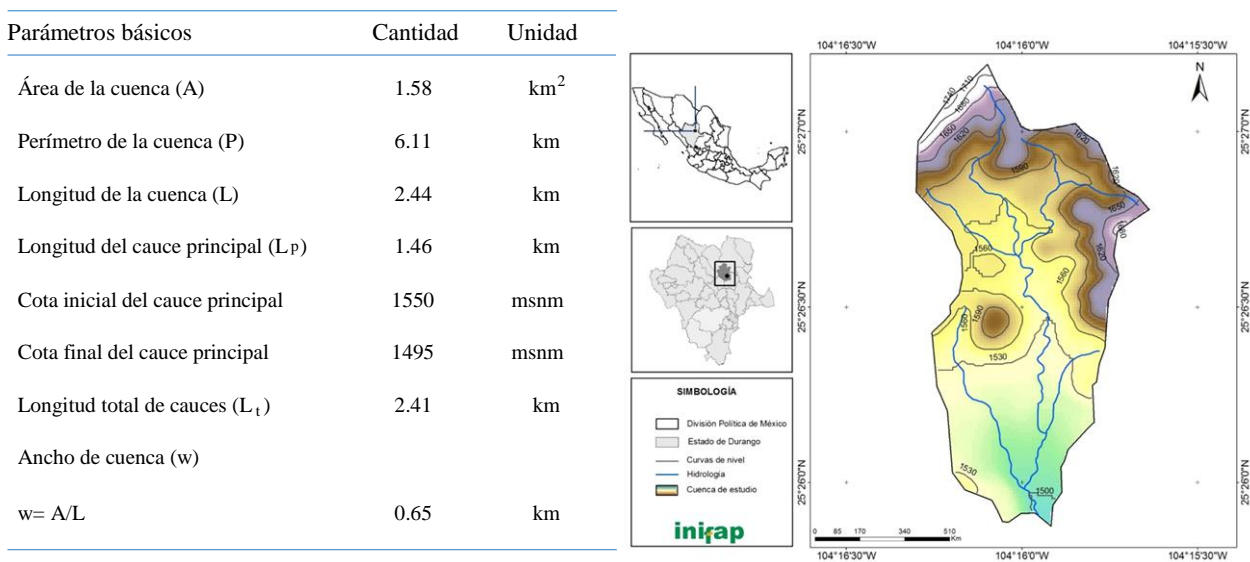


Figura 2. Parámetros de la cuenca San Luis del Cordero, Durango.

Cuadro 1. Componentes del estado de superficie en la cuenca experimental.

Cobertura	(%)
Roca	26.85
Suelo	52.4
Materia orgánica	4.44
Vegetación	15.92

El parámetro ‘K’, se puede establecer como la tasa máxima de pérdida de suelo que se puede aceptar en una prospección temporal conservacionistamente dimensionado. Para el caso de la cuenca mencionada líneas arriba, se estima que la pérdida de suelo no debe de sobrepasar los 10 mm para no mermar la capacidad productiva de flora silvestre, entre la que se incluyen los pastos nativos, ya que es la fuente principal de ingreso a las localidades por pastoreo de ganado.

Pérdida de productividad

La ecuación diferencial 5, contabiliza el tiempo en que se perdería una determinada cantidad de suelo acorde a la tasa de erosión y al límite máximo impuesto. Esta reducción en cantidad disponible de suelo, impacta de manera directa a la productividad de los cultivos en zonas áridas.

En zonas de temporal, el rendimiento de los cultivos está asociado a la presencia de eventos climáticos (naturaleza aleatoria) para su óptimo desarrollo; así entonces, el proceso de erosión sigue las mismas variaciones que la precipitación pluvial. De ahí que es pertinente visualizar la productividad del suelo como consecuencia de factores edafoclimáticos (Sánchez, 1995).

Acorde a Todorovic *et al.* (1987), la relación entre el rendimiento de un cultivo en un año dado (Y_n) y el rendimiento del mismo cultivo bajo un suelo sometido a erosión (X_n), está dado por:

$$X_n = Y_n \left[a + \frac{(1-a)d_n}{D} \right]; d_n < D \quad 24)$$

En la anterior ecuación, el parámetro ‘a’ es $\frac{X_n}{Y_n}$, d_n es el suelo disponible y ‘D’ es el espesor de la capa superior o arable. La tasa de pérdida de suelo estaría dada por:

$$r = \frac{e}{D} \quad 25)$$

Donde: ‘e’ es la pérdida anual de suelo. Así entonces, el suelo disponible ‘ d_n ’ se irá degradando conforme a:

$$d_n = D(1-r)^n \quad 26)$$

En la anterior ecuación ‘n’ indica el número de año. Si la ecuación 26 se sustituye en la ecuación 24, se tiene:

$$X_n = Y_n [a + (1-a)(1-r)^n] \quad 27)$$

La anterior ecuación cuantifica el rendimiento X_n que se esperaría en el enésimo año bajo una tasa de erosión constante ‘r’ y partiendo del rendimiento esperado del cultivo Y_n .

Aleatoriedad del rendimiento

Como se ha asentado, la aleatoriedad de los rendimientos de los cultivos en zonas de temporal sigue estrictamente la aleatoriedad de la precipitación pluvial. Si se considera que el rendimiento varía aleatoriamente con una media μ y desviación estándar σ entonces se pueden generar estocásticamente rendimientos del cultivo como:

$$Y_n = \mu + \sigma z \quad (28)$$

Siendo z:

$$z = [-2\ln(\text{rnd}_1)]^{0.5} \cos[2\pi(\text{rnd}_2)] \quad (29)$$

Donde: $\text{rnd}_{1,2}$ son números aleatorios con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.

Parametrización del modelo de productividad

El parámetro 'a' de la ecuación 27, es el cociente entre el rendimiento del cultivo bajo condiciones de no erosión (suelo naturalmente conservado, X_n) y el rendimiento del cultivo bajo un suelo erosionado. Estos valores se pueden obtener de experiencia empírica o recurrir a literatura en el contexto. Así, el Cuadro 2 muestra valores guía para obtener este valor.

Cuadro 2. Reducción del rendimiento en maíz por pérdida de suelo (Mokma y Siez, 1992).

Grado de erosión	Rendimiento promedio (t ha ⁻¹)
Ligero	7.34
Moderado	7.09
Severo	5.83

Otros autores como Mbagwu (1988) obtuvo relaciones funcionales entre el rendimiento del cultivo maíz y la erosión del suelo en parcelas con erosión inducida. Para el primer año de estudio encontró:

$Y_a = 3.2761e^{-0.1621x}$ con $R^2 = 0.998$ y para el segundo: $Y_b = 1.6116e^{-0.1489x}$ con $R^2 = 0.985$. En estas regresiones 'x' es la erosión del suelo expresada en cm e Y_a , Y_b son los rendimientos anuales (t ha⁻¹).

Para la cuantificación del parámetro 'r', es necesario establecer el espesor de la capa de suelo que interesa conservar (D), usualmente esto se puede definir por la capa arable (en agricultura de temporal y riego) o aquella capa susceptible de ser erodada con mayor facilidad en agostaderos. Por otro lado, el parámetro 'e' de la ecuación 25 es la tasa de erosión actual: por ejemplo, como ya se ha anotado, en la cuenca experimental del INIFAP en el municipio de San Luis del Cordero, Durango, la tasa observada de erosión durante 2016, en tres eventos es de 0.44 mm año⁻¹ en promedio. Lo anterior después de analizar los sedigramas (variación de los sólidos en suspensión en el tiempo medidos en el escurrimiento), producto de eventos lluviosos (Figura 3).

Sin embargo, ante la carencia de este valor, se puede manipular el modelo con diferentes tasas de erosión y profundidades de suelo para verificar cual sería la pérdida en productividad del cultivo ante diferentes escenarios de manejo.



Figura 3. Toma de muestras para determinar la concentración de sólidos en suspensión en un evento de escurrimiento durante agosto de 2016. Cuenca experimental INIFAP, San Luis del Cordero, Durango.

Resultados y discusión

Con la información de la cuenca experimental descrita anteriormente con una tasa inicial de erosión de 0.33 mm año^{-1} y prefijando una tasa máxima permisible de 10 mm año^{-1} , utilizando la ecuación 23 que es la solución numérica de la ecuación diferencial 5, se tiene que, si la tasa de erosión se mantiene constante en el tiempo, el suelo habrá llegado a su máximo permisible en un periodo de 20 años (parte superior de la Figura 4) con un impacto en la productividad del cultivo de maíz pasando de 4.5 t ha^{-1} a 2.5 t ha^{-1} (parte inferior de la Figura 4).

Por otra parte, si la tasa de pérdida de suelo se sitúa en 10 mm año^{-1} , entonces la productividad caería a 1.2 t ha^{-1} . La serie de tiempo que señala la parte baja de la Figura 4, se obtuvo mediante las ecuaciones 24 y 25 en un proceso de simulación de cien años para dos tasas de erosión 0.33 y 10 mm año^{-1} . Con base a lo anterior, se generó un programa computacional, codificado en Fortran 90, para sistematizar este proceso haciendo aleatoria la producción del cultivo maíz (ecuaciones 28 y 29).

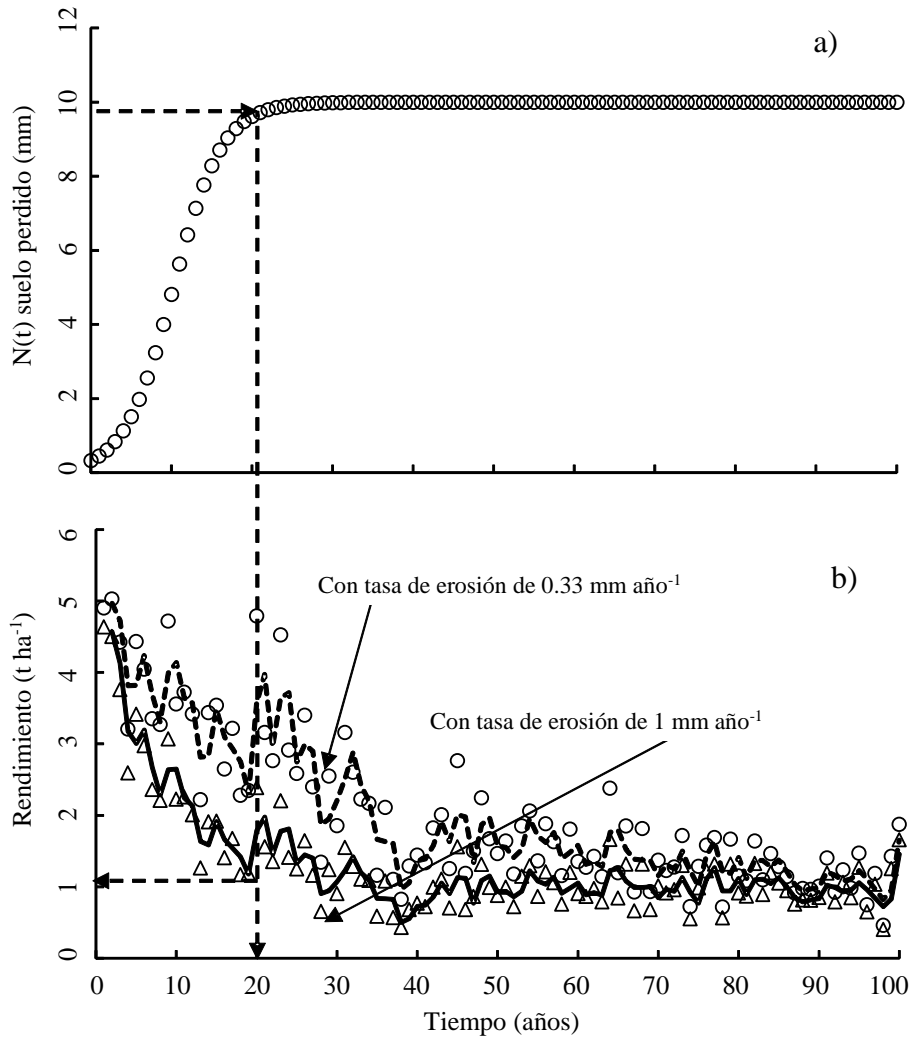


Figura 4. Ensamble de modelos. Modelo logístico para la predicción de abatimiento de profundidad de suelo por erosión (a) y serie de tiempo de pérdida de productividad del suelo y su impacto en el rendimiento del cultivo maíz (b).

La pérdida de productividad es el reflejo de la pérdida de profundidad de suelo con la consecuente merma en capacidad de retención de humedad y fertilidad.

Análisis de parámetros del modelo

Una vez obtenidos los parámetros de la ecuación diferencial, se pueden hacer estimaciones de la pérdida de suelo y su productividad bajo diferentes escenarios de manejo. La Figura 5 presenta la forma de la solución de la ecuación diferencial al considerar diferentes tasas iniciales de erosión ($N_0 = 0.1, 0.4$ y 2) manteniendo constante la tasa de erosión en el tiempo ($r = 0.44$).

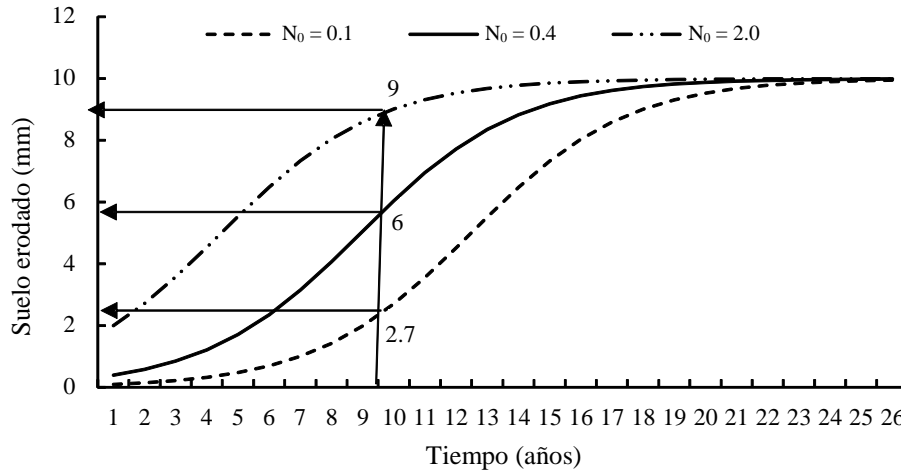


Figura 5. Variación de la pérdida de suelo considerando diferentes tasas iniciales de erosión (parámetro N_0 de la ecuación 23).

De la Figura 5 se puede apreciar la importancia de la tasa de erosión inicial en la degradación del suelo circunscrita en el tiempo. Para el caso de la cuenca experimental del INIFAP, en caso de que esta tasa de erosión se mantenga (0.44 mm de suelo perdido por año), en un plazo no mayor a 20 años se habría erodado los 10 mm de suelo que se impuso a la cuenca como permisible. La gráfica muestra la cantidad de suelo que se perdería en un plazo de nueve años para distintas tasas iniciales de erosión, para el caso de la cuenca experimental la pérdida sería de 6 mm de suelo.

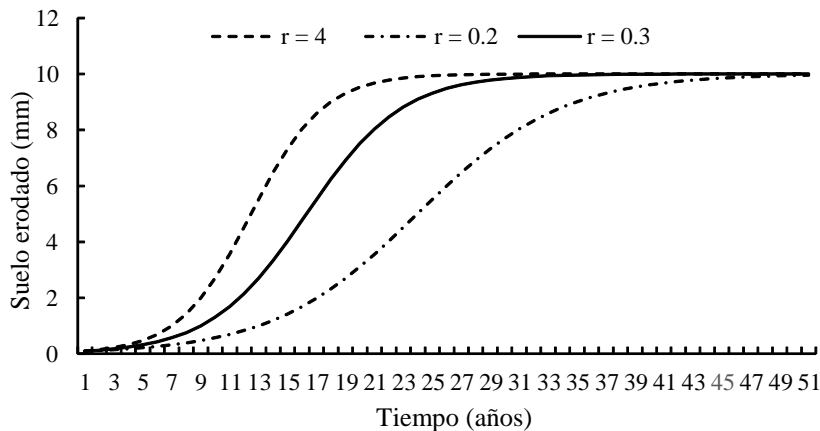


Figura 6. Variación de la pérdida de suelo considerando diferentes tasas de erosión (parámetro ‘r’ de la ecuación 23) con tasa inicial constante.

La Figura 6 señala el impacto de la tasa de erosión en el tiempo (r) en la forma de la solución de la ecuación diferencial 5, así mientras mayor la tasa de erosión ($r= 4 \text{ mm año}^{-1}$), más rápido se alcanzará el límite permisible de pérdida de suelo para la cuenca de estudio.

Tanto el modelo exponencial Maltusiano como el Logístico de Verhults (Figura 1), asumen que la tasa de erosión es proporcional a la magnitud del problema (mayores factores impulsores de erosión, asume mayor tasa de erosión; esta es la asunción base para la solución de la ecuación

diferencial que define el fenómeno). Sin embargo, el modelo logístico asume también que la erosión depende de la disponibilidad de suelo (parámetro $1 - \frac{N}{K}$ de la ecuación 5), de tal manera que el crecimiento exponencial se ve limitado a baja disponibilidad de suelo. Cuando la profundidad de suelo susceptible de ser erodada desaparece, entonces la tasa de erosión se reduce a cero, alcanzando una condición estable situándose en su capacidad erodable (K).

Conclusiones

Se propone una ecuación diferencial logística para la proyección de pérdida de suelo por concepto de erosión hídrica. El resultado de erosión, es utilizado para cuantificar el impacto en la productividad del cultivo de maíz en zonas con temporal deficiente sujetas al proceso de erosión. Si bien, acorde a la literatura, la ecuación logística no ha sido utilizada ampliamente para explicar el proceso de erosión, en esta ocasión se presenta como opción para este objetivo en estricto apego a las asunciones del modelo y en la geometría que presentan las funciones de erosión de suelos en campo. El modelo considera tres parámetros que pueden cuantificarse con información medida directamente en campo o bien, como una primera aproximación, con datos provenientes de literatura. Se recomienda su uso cuando la disponibilidad e información es escasa y se desea contar con una apreciación del impacto de la pérdida de suelo en la productividad de agostaderos y/o cultivos anuales.

Literatura citada

- Arnold, J. G.; Moriasi, D. N.; Gassman, P. W.; Abbaspour, K. C.; White, M. J.; Srinivasan, R.; Santhi, C.; Harmel, R. D.; Van, G. A.; Van, L. M. W.; Kannan, N. and Jha, M. K. 2012. Swat: model use, calibration, and validation. *ASABE*. 55(4):1491-1508.
- Bacaër, N. 2011. *A Short history of mathematical population dynamics*. Springer-Verlag London Limited. London. 160 p. DOI 10.1007/978-0-85729-115-8 6.
- Brooks, K. N.; Pfolliott, F. F. and Magner J. A. 2012. *Hydrology and the management of watersheds*. 4th Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York. 552 p.
- FAO. 1995. *Land and environmental degradation and desertification in Africa*, FAO Corporate Document repository. URL: <http://www.fao.org/docrep/x5318e/x5318e00.htm#Contents>.
- Ffolliott, P. F.; Brooks, K. N.; Tapia, R. P.; Chevesich, P. G. and Neary, D. G. 2013. *Soil erosion and sediment production on watershed landscapes: processes, prevention, and control*. UNESCO. Documentos técnicos del PHI-LAC, No. 32. 70 p.
- Gershenfeld, N. A. 1999. *The nature of mathematical modeling*. Cambridge, UK. Cambridge University Press. 356 p.
- Goodrich, D. C.; Burns, I. S.; Unkrich, C. L.; Semmens, D. J.; Guertin, D. P.; Hernández, M.; Yatheendradas, S.; Kennedy, J. R. and Levick, L. 2012. Kineros2/AGWA: model use, calibration and validation. *Transactions of the ASABE. American Society of Agricultural and Biological Engineers*. 55(4):1561-1574.
- Mbagwu, J. S. C. 1988. Physico-chemical properties and productivity of an Ultisol in Nigeria as affected by long-term erosion. *Pedologie*. 38(2):137-154.
- Obalum, S. E.; Buri, M. M.; Nwite, J. C.; Watanabe, Y.; Igwe, C. A. and Wakatsuki, T. 2012. Soil degradation-induced decline productivity of sub-saharan african soils: the prospects of looking downwards the lowlands with the sawah ecotechnology. *Appl. Environm. Soil Sci*. 10 p. doi: 10.1155/2012/673926.

- Pearl, R. and Reed, L. J. 1920. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 6:275-288. <http://www.pnas.org/search?fulltext=pearl+and+reed&submit=yes&x=0&y=0>.
- Sánchez, C. I. 1995. Erosión y productividad en la Comarca Lagunera. Folleto científico núm. 4. INIFAP ORSTOM. 25 p.
- Sánchez, C. I. 2005. Fundamentos para el aprovechamiento integral del agua. Una aproximación de simulación de procesos. Libro científico núm. 2. INIFAP CENID RASPA. 272 p.
- Skoldberg, E. 2012. The logistic model for population growth. School of Mathematics etc. National University of Ireland, Galway. Ireland.
- Stewart, J. 1996. Calculus: concepts and context. Brooks cole. Book 4th edition. 493 -508 pp.
- Thornes, B. J. 2004. Stability and inestability in the management of Mediterranean desertification. *In: Wainwright, J. and Mulligan, M. (Eds.). Environmental Modelling. Finding Simplicity in Complexity.* John Wiley & Sons, Ltd. 303-315 p.
- Van der Knijff J. M.; Jones R. J. A. and Montanarella, L. 2000. Soil erosion assessment risk in Europe. European Commission Directorate General Jrc Joint Research Centre Space Applications Institute European Soil Bureau. 31 p.
- Wainwright, J. and Mulligan, M. 2004. Environmental modelling. Finding simplicity in complexity. John Wiley & Sons, Ltd. London. 822 p.
- Wolfram, S. 2002. A new kind of science. Champaign, IL. Wolfram Media. 918 p.